華南師範大學

二〇〇四年招收港澳硕士研究生入学考试试题

考试科目：高等数学（含线性代数）

适用专业：光学

一、填空题（每小题 5 分，共 30 分）

1.设 $f(x)$ 为可微函数，且 $\dfrac{d}{dx}f\left(\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{2}{x}$ ，则 $f'\left(\dfrac{1}{3}\right)=$________.

2.设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-x-1}{3x}, & x>0\\ \dfrac{\int_0^x \sin t^2dt}{x^3}, & x<0\end{cases}$ ， 则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$________.

3.设 xe^x 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int xf'(x)dx=$________.

4.设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^y=y^x$ 确定，则 $\dfrac{dy}{dx}=$________.

5.交换二次积分次序后， $\int_{-1}^0 dy\int_2^{1-y} f(x,y)dx=$________.

6.已知 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3),\boldsymbol{\beta}=\left(1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right)$，设 $\mathbf{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置矩阵，

则 $\mathbf{A}^n=$________.

考生注意：答案写在本试题上无效

（以下 10 个题目，每题 12 分，共 120 分）

二、求 $\int_{-1}^{2} x\sqrt{|x|}dx$.

三、已知 $f(x)=\int_{x}^{\sqrt{x}}\frac{\sin t}{t}dt$，求 $\int_{0}^{1} f(x)dx$.

四、试求 $\oint_{\Gamma} 2ydx+3xdy-z^2dz$，其中 Γ 为圆周 $x^2+y^2+z^2=9, z=0$，若从 z 轴的正向看去，这圆周是取逆时针方向.

五、试求 $\oiint_{S^+}(x^2-yz)dydz+(y^2-xz)dzdx+(z^2-xy)dxdy$,其中 S^+ 为球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 的外侧.

六、求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2x^n$ 的和函数，并注明成立的范围.

七、将函数 $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ 在 $(0,2\pi)$ 内展成周期为 2π 的傅里叶级数，并求出级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$ 的和.

八、设函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $y''-3y'+2y=2e^x$，且其图形在点 $(0,1)$ 处的切线与曲线 $y=x^2-x+1$ 在该点处的切线重合，求函数 y 的解析表达式.

九、设 $a>b>0$，$n>1$，试证明

$$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b).$$

十、已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\alpha}_{s+1}\,(s\ge 1)$线性无关，设向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$可表为$\boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{\alpha}_i+t_i\boldsymbol{\alpha}_{s+1}\,(i=1,2,\cdots,s)$，试证明向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性无关.

十一、设$\mathbf{A},\mathbf{B}$为两个n阶矩阵，$\mathbf{A}$有n个互不相同的特征值，试证明$\mathbf{A}$的特征向量也总是$\mathbf{B}$的特征向量的充分必要条件为$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$.