

# 華南師範大學

2004 年招收港澳碩士研究生入學考試試題

考試科目：常微分方程

適用專業：基礎數學

一. (15 分) 求方程  $(1+x^2)\frac{dy}{dx} = 2x(1+y^2)$  滿足初始條件  $y(0) = 0$  的解.

二. (15 分) 求解方程:  $(x+3y)dx + xdy = 0$ .

三. (15 分) 求解伯努利(Bernoulli)型方程:  $\frac{dy}{dx} = xy + xe^{x^2}y^{-1}$ .

四. (15 分) 求解一階隱方程:  $y = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \ln\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]$ .

五. (15 分) 求解二階方程:  $y\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y\frac{dy}{dx}$ .

六. (15 分) 求二階常係數線性方程的通解:  $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 1 + x + \sin x$ .

七. (15 分) 設有方程組  $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax} + \mathbf{f}(t)$ , 其中  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$ .

(1) 求對應齊方程組的基解矩陣  $\Phi(t)$ ;

(2) 設  $\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} e^{5t} \\ 0 \end{pmatrix}$ . 求方程組滿足初始條件  $\mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  的解  $\mathbf{v}(t)$ .

考生注意: 答案寫在本試題上無效

共 2 頁  
第 1 頁

八. (15 分) 判断方程  $y' = \sin(x^2 + y^2)$  过平面上任一点  $(x_0, y_0)$  的解是否存在唯一, 并说明理由; 证明任一解的最大存在区间为  $(-\infty, +\infty)$ .

九. (15 分) 设  $\mathbf{A}(t)$  是连续的  $n$  阶反对称方阵, 即  $\mathbf{A}(t)^T = -\mathbf{A}(t)$  ( $\mathbf{A}(t)^T$  表示矩阵  $\mathbf{A}(t)$  的转置). 证明对于线性方程组  $\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$  的任意一个解矩阵  $\Phi(t)$ , 成立  $\det \Phi(t) = C$  (常数), 即  $\Phi(t)$  的伏朗斯基(Wronski)行列式恒为常数.

十. (15 分) 设有二阶线性方程  $y'' + (a+b)y' + aby = f(x)$ , 其中  $f(x)$  是  $[0, +\infty)$  上的连续函数, 常数  $b > a > 0$ .

(1) 写出通解  $\varphi(x)$  的表达式;

(2) 证明如果  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上是有界的, 则  $\varphi(x)$  也是有界的;

(3) 设  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在, 证明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$  存在, 并求出这个极限.

共 2 页

第 2 页