華南師範大學

2004 年招收港澳硕士研究生入学考试试题

考试科目：数学分析与高等代数

适用专业：课程与教学论专业、基础数学专业

1.（15 分）设 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$，求函数 f 的导函数，并讨论导函数的连续性。

2.（15 分）设 f 为定义在 x_0 的某右邻域 $U_+(x_0)$ 上的单调有界函数，证明右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 存在。

3.（15 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$ 的和函数。

4.（15 分）计算 $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{z}dxdydz$，其中 Ω 是由锥面 $z=\dfrac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=h\ (R>0,h>0)$ 所围成的闭区域。

5.（15 分）设函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上对变量 x 连续（对每个固定的变量 y），且 f 关于 y 的偏导函数 $f_y(x,y)$ 在 D 上有界。证明函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续。

6.（15 分）设 $f(x)$、$g(x)$ 是数域 F 上的多项式，$(f(x),g(x))$ 表示 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式。证明：$(f(x),g(x))^n=(f^n(x),g^n(x))$。

考生注意：答案写在本试题上无效

7.（15 分）讨论线性方程组

$$\begin{cases}(3-2\lambda)x_1+(2-\lambda)x_2+x_3=\lambda\\ (2-\lambda)x_1+(2-\lambda)x_2+x_3=1\\ x_1+x_2+(2-\lambda)x_3=1\end{cases}$$

何时有解，何时无解。有解时解出其解。

8.（15 分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 是线性空间 V 的一组基。

1）证明 $\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2,\ldots,\beta_n=\alpha_1+\ldots+\alpha_n$ 也是 V 的一组基；

2）当向量 α 在 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 下的坐标为 $(n,n-1,\ldots,2,1)$ 时，求 α 在 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ 下的坐标。

9.（15 分）设 F 是数域，$V=F[x]_n=\{f(x)\in F[x]|\partial f(x)<n\}$，其中 $\partial f(x)$ 表示 x 的次数。定义 V 上线性变换如下：

$$\sigma(f(x))=xf'(x)-f(x)。$$

1）求 $Ker\sigma$ 和 $\sigma(V)$；2）证明 $V=Ker\sigma\oplus\sigma(V)$。

10.（15 分）令 η 是 n 维欧氏空间 V 的一个单位向量，定义 $\sigma(\alpha)=\alpha-2(\eta,\alpha)\eta$。证明：1）$\sigma$ 是 V 上的正交变换；2）σ 在 V 的基下的矩阵的行列式值为 -1。