20

2.4

天津师范大学

2004年硕士研究生入学考试试题

试题名称：数学基础　　　　　　　　　　　　　　　　试题编号：329

专业名称：基础数学、课程与教学论、计算数学

研究方向：常微分方程等　　　　　　　　　　　　　　共2页，第1页

★ 考生答案必须写在答题纸上，写在其他位置无效。

（1—6题每题15分，7—9题每题20分）

1．设 $x_n=\sum_{k=1}^{n}(n^k+1)^{-\frac{1}{k}}$，$n$=1，2，…，求极限 $\lim_{n\to\infty}x_n$。

2．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，$f(a)=f(b)$，$f'(a)f'(b)>0$，证明方程 $f'(x)=0$ 在（a，b）内至少有两个根。

3．设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有一、二阶导数，$f(0)=f(1)=1$，且 $\max\limits_{0\le x\le 1}\{f(x)\}=2$，证明 $\min\limits_{0\le x\le 1}\{f''(x)\}\leqslant -8$。

4．证明函数 $f(x)=\sqrt{x}\ln x$ 在（0，$+\infty$）上一致连续。

5．判别级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n n!}{n^n}$ 的敛散性，其中 $a>0$。

6．判断含参变量非正常积分 $\int_0^{+\infty}xe^{-xy}dy$ 在（0，$+\infty$）上是否一致收敛。

7．设 $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0\in F_3[x]$，定义 $\sigma(f(x))=xf'(x)-f(x)$，

(1) 证明 σ 是 $F_3[x]$ 的一个线性变换；(2) 求 σ 关于 $F_3[x]$ 的基 $1,x,\frac{x^2}{2!},\frac{x^3}{3!}$ 的矩阵 A；(3) 求 $Ker(\sigma)$，并在 $Ker(\sigma)$ 中取一个基，再扩充成 $F_3[x]$ 的一个基，求 $\sigma(f(x))$ 关于这个基的坐标；(4) 求 $\text{Im}(\sigma)$，并证明 $\text{Im}(\sigma)$ 在 σ 之下不变。

8. 设$A=\begin{pmatrix}0 & x & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 9 & y & 0\end{pmatrix}\in M_3(R)$。(1)若$A$有3个线性无关的特征向量，求$x, y$应满足的条件；（2）设$\xi=(0,x,1)$，$\eta=(0,3,0)$，$\zeta=(9,y,0)\in R^3$，求$\dim L(\xi,\eta,\zeta)$；（3）设$\alpha=(1,-2,0)'$，$\beta=(0,1,1)'$，$\nu=(1,0,-2)'$分别为3阶矩阵$B$的属于特征值$2,2,-2$的特征向量，求矩阵$B$；（4）当$k$为正整数时，求$B^k$。

9. 设A为一个n阶实可逆矩阵，（1）证明对任一实n维非零向量$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$，都有$f=X'A'AX>0$；（2）证明存在两个正交矩阵U与V，满足$AU=V\begin{pmatrix}a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & a_n\end{pmatrix}$，其中$a_i>0\,(i=1,2,3,\cdots,n)$。