中 山 大 学

二00六 年港澳台人士攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：253

科目名称：高等数学（C）

考试时间：四月八日 下午

考 生 须 知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不得分！请用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答。答题要写清题号，不必抄题。

一、选择题，每小题只有一个答案正确，请将正确答案前的字母编号和对应的题号写在答题纸上（本题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分。特别提醒：答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不得分）：

1．若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$，则下列说法中正确的是

A）$f(x_0)=A$；　　B）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$；

C）$f(x)$ 在点 x_0 有定义；　　D）$f(x)$ 在点 x_0 连续。

2．若函数 $y=f(x)$ 为可微函数，则 $dy=$

A）与 Δx 为等价无穷小；　　B）为 Δx 的线性函数；

C）当 $\Delta x\to 0$ 时，为 Δx 的高阶无穷小；　　D）上面三个答案都不对。

3．下列等式中，正确的是

A）$\int f'(x)dx=f(x)$；　　B）$\int f'(e^x)dx=f(e^x)+c$；

C）$\int f'(\sqrt{x})dx=f(\sqrt{x})+c$；　　D）$\int xf'(1-x^2)dx=-\frac{1}{2}f(1-x^2)+c$。

4．设 $f(x)=\begin{cases} x^2+2x+2, & x\le -1 \\ \sqrt{x+2}, & x>-1 \end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处

A）可导且有极小值；　　B）连续且有极小值；

C）可导且有拐点 $(-1,\ 1)$；　　D）连续且有极大值。

5．设 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ 为两个 n 阶方阵，且 $\mathbf{AB}=\mathbf{0}$，则

A）$\mathbf{A}=\mathbf{0}$ 或 $\mathbf{B}=\mathbf{0}$；　　B）$\mathbf{A}=\mathbf{0}$；

C）$\mathbf{B}=\mathbf{0}$；　　D）以上三个答案都不对。

6．若 λ_1、λ_2 是 n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 的特征值，$\lambda_1\ne\lambda_2$，$\mathbf{x}_1$ 与 $\mathbf{x}_2$ 分别是对应于 λ_1 与 λ_2 的特征向量，则对任意实数 k_1、k_2，有

A）$k_1\mathbf{x}_1+k_2\mathbf{x}_2$ 是 $\mathbf{A}$ 的特征向量；　　B）$k_1\mathbf{x}_1-k_2\mathbf{x}_2$ 是 $\mathbf{A}$ 的特征向量；

C）$\mathbf{A}(k_1\mathbf{x}_1+k_2\mathbf{x}_2)=\lambda_1k_1\mathbf{x}_1+\lambda_2k_2\mathbf{x}_2$；　　D）$\mathbf{A}(k_1\mathbf{x}_1+k_2\mathbf{x}_2)=\mathbf{0}$。

7. 设 A、B 为随机事件，$A \cap B = \varnothing$，则在每次试验中，A、B

A）相互独立；　　B）不会同时发生；

C）至少有一个发生；　　D）同时发生。

8. 已知：一维连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，密度函数为 $f(x)$，$x \in (-\infty, +\infty)$，且 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，则对于 $x \in (-\infty, +\infty)$，有

A）$F'(x) = f(x)$；　　B）$F''(x) = f(x)$；

C）$F(x) = f(x)$；　　D）$F(x)$ 不可导。

二、填空题，按顺序将答案写在答题纸上，并注明对应的题号（本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分。特别提醒：答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不得分）：

1. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\ln\left(x^2 + y\right) = x^3 y + \sin x$ 确定，$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \left(\underline{\qquad\qquad}\right)$。

2. 已知 $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x = e^2$，且 a 为有限实数，则 $a = (\underline{\qquad\qquad})$。

3. 设曲线 $f(x) = x^n$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线与 x 轴的交点为 $(\xi_n, 0)$，n 为自然数，则 $\lim\limits_{n \to \infty} f(\xi_n) = (\underline{\qquad\qquad})$。

4. 由曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = x$ 围成的平面图形的面积为 $(\underline{\qquad\qquad})$。

5. $(-1)^{N(23154)} a_{12}a_{23}a_{31}a_{45}a_{54}$ 为五阶行列式 $|a_{ij}|$ 的一项，$N(23154)$ 为排列 23154 的逆序数，则 $(-1)^{N(23154)} = (\underline{\qquad\qquad})$。

6. 已知随机变量 X 仅取 0, 1, 4 三个值，且 $P(x=0) = \dfrac{1}{6}$，$P(X=1) = \dfrac{1}{3}$，则 $E(X) = (\underline{\qquad})$。

三、解答题（本题共 10 小题，共 94 分。特别提醒：答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不得分。可以先做后面的题目，请注明题号）：

1.（11 分）若 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ax - \sin x}{\int_b^x t^2 dt} = c$，$c \neq 0$，且 c 为有限实数，试确定常数 a, b, c 的值。

2.（11 分）设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，$x > 0$，且 $f(x)F(x) = \dfrac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}$，$F(1) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi$，试求 $f(x)$。

3.（10 分）设 $x > 0$，利用导数证明：$x^2 + 1 > \ln x$。

4.（11 分）已知函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，且 $f(0) = 0$，$f(1) = 1$，证明：存在 $\xi \in (0, 1)$，使得 $f(\xi) = 1 - \xi$。

5.（8 分）若 $\mathbf{A}$ 为 $2k+1$ 阶方阵，k 为某个已知自然数，且 $\mathbf{A}$ 的行列式 $|\mathbf{A}|=1$，请计算行列式 $|-3\mathbf{A}|$。

6.（8 分）若 n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 的列向量为 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$，且 $\mathbf{A}$ 的行列式 $|\mathbf{A}|=0$，证明：$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$ 线性相关。

7.（9 分）设 $\mathbf{A}$ 为任意 n 阶方阵，证明：对任意 n 维列向量 $\mathbf{x}$，有 $\mathbf{x}^T\left(\mathbf{A}-\mathbf{A}^T\right)\mathbf{x}=\mathbf{0}$。$\mathbf{x}^T$ 和 $\mathbf{A}^T$ 分别为列向量 $\mathbf{x}$ 与方阵 $\mathbf{A}$ 的转置。

8.（9 分）已知：连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} a, & 0<x<1, \\ 0, & \text{其它。} \end{cases}$$

（1）确定 a 之值；
（2）求 $E(X)$。

9.（8 分）已知：随机事件 A 的概率 $P(A)=1$，证明：A 与 A 自己相互独立。

10.（9 分）已知某份试卷共有 a 道选择题，a 为自然数，每题有 A、B、C、D 四个答案供选择，其中只有一个答案正确。某人对每道题均随机地选择答案，计算在这 a 道题中恰好答对 b 道题的概率（$0 \le b \le a$，且 b 为整数）。