

中山大学

二〇〇五年港澳台人士攻读博士学位研究生入学考试试题

科目代码: 309

科目名称: 随机分析与金融

考试时间: 4月17日上午

考生须知

全部答案一律写在答题纸上, 答在试题纸上的不得分!
答题要写清题号, 不必抄题。

1. (14分) 用 X_t 表示小麦目前的现货价格, X_{t+T} 表示从现在到 T 期后的现货价格, 信息集为 $F_t = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_t)$ 。用 $Y(T, t)$ 表示在 t 时刻所报 T 期后的期货价格; 当一期过后, 同一期货价格的新的报价记为 $Y(T-1, t+1)$ 。

(a) 如果期货价格由期末价格的目前期望值竞价决定, 即 $Y(T, t) = E[X_{t+T} | F_t]$, $T=1, 2, \dots$, 试证明期货报价 $Y(T, t)$ 是关于 σ -域 $F_t, \dots, F_{t+n}, \dots$ 的鞅 (martingale)。

(b) 令 $\alpha = (1+r)^{-1}$, 其中 $r > 0$ 。如果期货价格为期末价格的条件期望的适当贴现, 即 $Y(T, t) = \alpha^T E[X_{t+T} | F_t]$, 试证明期货报价 $Y(T, t)$ 是关于 σ -域 $F_t, \dots, F_{t+n}, \dots$ 的下鞅 (submartingale)。

2. (15分) 设某项资产的英镑价格服从随机微分方程

$$dS_t = \mu_1 S_t dt + \sigma_1 S_t dW_t$$

在时刻 t , 1 英镑的美元价格是 E_t , 而

$$dE_t = \mu_2 E_t dt + \sigma_2 E_t d\tilde{W}_t$$

这里 $\{W_t\}_{t \geq 0}$ 和 $\{\tilde{W}_t\}_{t \geq 0}$ 是两个布朗运动。设英镑市场和美元市场的无风险利率分别是 r 和 s 。

(a) 分别求出该资产在英镑市场和美元市场的贴现价格的随机微分方程;

(b) 在每个市场, 参数满足什么条件时贴现价格是鞅?

(c) 有无可能贴现价格在一个市场是鞅而在另一个市场不是鞅? 这对评估外汇市场的期权有何意义?

3. (14分) 设随机过程 $\{S_t\}_{t \geq 0}$ 服从随机微分方程

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t$$

其中 $\{W_t\}_{t \geq 0}$ 是标准布朗运动, μ_t 和 σ_t 是时间 t 的确定性函数。试求期望 $E[S_t]$ 和方差 $\text{var}[S_t]$ 。

(第2页在背面)

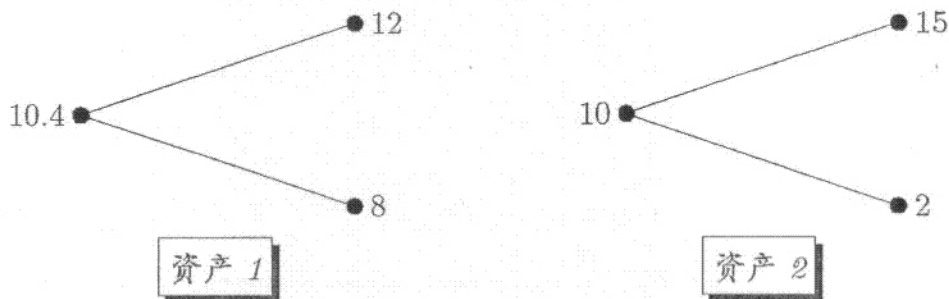
考试完毕, 试题和草稿纸随答题纸一起交回。

第1页 共2页

4. (12分) 假设当前时刻为 t , 标的资产的价格为 S_t , 无风险利率为 r , 期权的到期日为 T , 执行价格为 X , 将欧式买权 (European call option) 在时刻 t 的价格记为 $C(S_t, X, T)$. 试用无套利 (no-arbitrage) 原理证明: 对于 $X_1 < X_2$, 有

$$C(S_t, X_1, T) - C(S_t, X_2, T) \leq e^{-r(T-t)}(X_2 - X_1).$$

5. (20分) 在一个单期市场模型中, 有两种资产、两个自然状态, 其价格变动分别如下:



- 计算模型中隐含的状态价格 (state prices)。
- 计算模型中的风险中性概率 (risk-neutral probabilities)。
- 计算模型中隐含的无风险利率。
- 如果以资产 2 为标的的欧式买权价格为 2.4, 求其执行价格为多少?
- 欧式买权 A 的标的资产为资产 1, 执行价格为 9, 请问是否存在一个由资产 1 和资产 2 构成的投资组合对期权 A 进行复制? 如果有则其组合中资产 1 和资产 2 的持有份额各为多少?

6. (15分) 设股票价格 $\{S_t\}_{0 \leq t \leq T}$ 服从几何布朗运动

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

其中 $\{W_t\}_{0 \leq t \leq T}$ 是 \mathbb{P} -布朗运动, μ 和 σ 是常数。设无风险利率为常数 r 。

(a) 求出一个与 \mathbb{P} 等价的概率测度 \mathbb{Q} , 使贴现价格 $\{\tilde{S}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ 是一个 \mathbb{Q} -鞅。

(b) 设有一个 T 时刻的未定权益 (contingent claim), 它由非负随机变量 C_T 给出, 且 $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[C_T^2] < \infty$ 。请问该未定权益是否可复制 (duplicate)? 如果可以, 请写出任何复制证券组合在时刻 t 的价值 $V_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)}C_T | \mathcal{F}_t]$ 和在时刻 0 的公平价格的表达式。

从以下两题中选一题作为必答题, 另一题作为附加题 (如解答, 分数做参考):

7. (10分) 设 $\{W_t\}_{t \geq 0}$ 是标准布朗运动, 试求解随机微分方程

$$dX_t = X_t^3 dt - X_t^2 dW_t, \quad X_0 = 1$$

8. (10分) 试就终端财富期望效用最大化问题阐述风险中性计算方法 (risk-neutral method) 的基本思想和求解步骤。