

中山大学

二〇〇五年港澳台人士攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码: 810

科目名称: **数学知识综合考试**

考试时间: 4月17日 上午

考生须知

全部答案一律写在答题纸上, 答在试题纸上的不得分!
答题要写清题号, 不必抄题。

请注意: 只需选做以下七门科目中两门科目的试题, 多选者只按前两部分试题计分。

一、常微分方程 (75分)

1、求下列方程的解 (30分):

1、 $y(x) = \int_0^x y(t) dt + x + 1$;

2、 $(x+4y)y' = 2x+3y-5$;

3、 $2yy'' = y'^2 + 1$.

二、(15分)求微分方程

$$y'''' - 6y'' + 9y' = xe^{3x} + e^{3x} \cos 2x$$

的通解, 这里 $y = y(x)$.

三、(10分) 求解方程组

$$\begin{cases} x_1'(t) = 3x_1(t) + 5x_2(t) \\ x_2'(t) = -5x_1(t) + 3x_2(t) \end{cases}$$

四、(10分) 求下列方程组的奇点, 并判别其类型 (即指出是焦点、结点、鞍点或者中心) 和稳定性。

1、 $x' = 2x, y' = x + y$;

2、 $x' = x - 2y, y' = 4x - 3y$.

五、(10分) 设 $p(x), q(x), f(x)$ 是区间 (a, b) 上的连续函数, $y_1(x), y_2(x)$ 是二阶方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的相应齐次方程的两个线性无关的特解。试求方程 (*) 的通解。

二、抽象代数 (75分)

1, 设 G 为非空集合, $*$ 为 G 中的二元运算, 满足以下条件: (1) $*$ 满足结合律; (2) $\forall a, b \in G$ 方程 $ax = b$ 及 $ya = b$ 恒有解。证明 G 关于运算 $*$ 构成群。(15分)

2, 证明 56 阶群 (记为 G) 有且仅有一个 7 阶子群 (记为 H), 则 $H \triangleleft G$ 。由此证明没有 56 阶的单群。(15分)

3, 设 $m = m_1 m_2 \dots m_s$, $(m_i, m_j) = 1, i, j = 1, 2, \dots, s$ 。证明: 有环同构 $Z_m \cong Z_{m_1} \times Z_{m_2} \times \dots \times Z_{m_s}$ 。(15分)

4, 环中元素 x 称为幂零的, 若有一正整数 n 使 $x^n = 0$ 。设 R 为一交换环, 证明集合 $I = \{x \in R \mid x \text{ 为幂零的}\}$ 是 R 的理想, 且商环 R/I 没有非零的幂零元。(15分)

5, 证明: $Q(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, 并求 $|Q(\sqrt{2} + \sqrt{3}) : Q|$ 。(15分)

三、复变函数 (75分)

一、(40分) 判断下列命题是否正确, 并说明理由或举反例。

(1) 若函数 $f(z)$ 在区域 D 解析, $f(z)$ 不恒等于零, 则 $f(z)$ 在 D 内不可能有无穷多个零点。

(2) 若复变函数 $f(z)$ 在区域 D 有一阶导数, 则 $f(z)$ 在区域 D 有任意阶导数。

(3) 设 $f(z)$ 在 $0 < |z - z_0| < R$ 解析, z_0 是 $f(z)$ 的本性奇点, 则 $\text{Res}(f(z), z_0) = \infty$ 。

(4) $f(z)$ 在区域 D 解析, 对某一点 $z_0 \in D$, 有 $f^{(n)}(z_0) = 0, n = 1, 2, \dots$, 则 $f(z)$ 为常数。

(5) 若 $z=a$ 是解析函数 $f(z)$ 的 m 阶零点, 则 $z=a$ 是函数 $[f(z)]^{-1}$ 的 m 阶极点。

二、(9分) 计算: $i^{i(i+1)}$, $\text{Ln}(2+i)$, $\int_{|z|=3} \frac{z dz}{(2z+1)(z-2)}$.

三、(9分) 求方程 $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0$ 在 $|z| < 1$ 内的根的个数。

四、(9分)求 $\sqrt{(1-z)(2+z)}$ 的枝点,并求 $f(z)$ 的不同单值连续分枝在 $z=2$ 的值。

五、(8分)证明:在扩充复平面上只有一个一阶极点的解析函数必有下列的形式。

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, ad-bc \neq 0.$$

四、 概率论与数理统计 (75分)

1. (10分) 设有一箱同类型的产品由三家工厂生产. 已知其中有 $\frac{1}{2}$ 的产品是第一家工厂生产的, 其它二厂各生产 $\frac{1}{4}$, 已知第一、第二两厂生产的产品中有2%是次品, 第三家厂生产的有4%是次品. 现从此箱里随机地选取一个产品, 求拿到的是次品的概率?

2. (10分) 设随机变量 X 的概率密度函数(p.d.f.)为:

$$f(x) = \begin{cases} Ke^{-3x} & x > 0, \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

(a) 试确定常数 K , (b) 求 $P(X > 0.1)$, (c) 求方差 $Var(X + 0.985)$.

3. (10分) 设随机变量 X 有密度函数为 $f(x)$, 求 $Y = X^2$ 的密度函数 $f_Y(y)$.

4. (10分) 设随机变量 X 有参数为 $B(n, p)$ 的二项分布, Y 为 $(-a, a)$ 上的均匀分布, 假设 X 和 Y 独立, 求 $Z = X + Y$ 的特征函数 $\varphi_Z(u)$.

5. (10分) 设随机变量 X 满足 $E(X^2) = 0$, 求证: $P(X = 0) = 1$.

6. (15分) 设总体 X 服从均匀分布 $U(0, \theta)$, $\theta \in (0, \infty)$ 是未知参数, 样本值为 x_1, x_2, \dots, x_n . (a) 求参数 θ 的最大似然估计; (b) 所求得的最大似然估计是 θ 的无偏估计吗? 为什么?

7. (10分) 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, 0.09)$, 随机抽得4个独立观察值12.6, 13.4, 12.8, 13.2. 求总体均值 μ 的95%的置信区间, 并阐明置信区间的意义. (已知标准正态分布 $\Phi(z)$ 的值为 $\Phi(1.96) = 0.975, \Phi(1.64) = 0.950$.)

五、 计算方法 (75分)

1. (20分) 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为非奇异矩阵, 证明:
(1) $A^t A$ 对称正定.
(2) $\text{cond}(A^t A)_2 = (\text{cond}(A)_2)^2$.

2. (20分) 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为严格行对角占优矩阵, $b \in \mathbb{R}^n$ 为任意 n 维向量. 证明求解方程 $Ax = b$ 的Jacobi迭代法收敛.

$$\begin{cases} -u''(x) = 3, x \in (-1, 1) \\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases}$$

试用线性有限元法求当将区间 $(-1, 1)$ 两等分时得到的近似解在格点0处的值.

4. (15分) 写出Simpson求积公式, 并说明它的代数精度.

六、 程序设计 (75分)

1. 单项选择题。(下列各题A、B、C、D四个选项中, 只有一个选项是正确的, 请将正确选项做在答题纸上。每小题2分, 10小题共20分。)

- 1) 可用作C语言用户自定义标识符的一组标识是:
A) my_file stid.oh record sizeof
B) 2a Do ABC type
C) _value void define ok
D) main constant Case good_morning
- 2) a、b、c、d都是整型变量且初值都为0, 则不正确的赋值语句是:
A) a=b=c=100;
B) (a+b);
C) d++;
D) d=(c=22)*(b++);
- 3) 给定条件表达式(M)?(a++)*(a--), 则其中表达式(M)与下述表达式等价的是:
A) (M==0)
B) (M==1)
C) (M!=0)
D) (M!=1)

4) 有如下程序，
#include <stdio.h>
main()
{
int x;
float y;
scanf("%3d%e",&x,&y);
printf("%d,%f\n",x,y);
}

输入数据 12345 678 <CR>后，输出结果应是：
(这里，“□”表示一个空格字符，“<CR>”表示回车键。)

- A) 12345,678.000
- B) 12345,678
- C) 123,45.000000
- D) 123,45

5) 以下不正确的 if 语句形式是：

- A) if(x>y);
- B) if(x<y) {x++; y++;}
- C) if(x==y) x+=y;
- D) if(x!=y) scanf("%d",&x);
else scanf("%d",&y);

6) 在 C 语言中，只有在使用它们时才占用内存单元的存储类型是：

- A) static 和 auto
- B) static 和 register
- C) register 和 auto
- D) register 和 extern

7) 为了判断两个字符串 s1 和 s2 是否相等，应当使用：

- A) if(s1=s2)
- B) if(s1==s2)
- C) if(strcmp(s1,s2)=0)
- D) if(strcmp(s1,s2)==0)

8) 以下二维数组 a 的正确定义是：

- A) int a[[2]={0,0};
- B) int m=1,n=2;
int a[m][n];
- C) int m,n;
scanf("%d%d",&m,&n);
int a[m][n];
- D) #define M 1
#define N 2
int a[m][n];

9) 若有以下说明语句，

```
static int a[[3]={1,3,5,7,9,11};  
int m=1,n=2;
```

则对于数组元素正确引用的是：

- A) a[m]+n
- B) *(a+6)
- C) *(a+m)+3
- D) *(a+m)+n

10) 若有以下说明语句，

```
struct student  
{  
int age;  
char name[10];  
float score;  
} stud,*p;
```

则对于结构体变量中成员非法引用的是：

- A) stud.name
- B) student.name
- C) p->name
- D) (*p).name

二、阅读下列程序段，请将程序正确执行结果做在答题纸上。(每小题 4 分，5 小题共 20 分。)

```
1. #include <stdio.h>  
#define square(n) (n)*(n)  
main()  
{  
int i=1;  
while(i<=10)  
printf("%3d",square(i++));  
printf("\n");  
}
```

```
2. #include <stdio.h>  
#include <string.h>  
main()  
{  
char str[20]="\012a.0\0";  
printf("%d",strlen(str));  
}
```

```
3. #include <stdio.h>  
main()  
{  
int i=0,s=0;  
for(;;)  
{  
i++;  
if(i<10) continue;  
s+=i; break;  
}  
printf("i=%d,s=%d\n",i,s);  
}
```

```
4. #include <stdio.h>  
main()  
{  
int i=0,s=0;  
for(;;)  
{  
i++;  
if(i<10) continue;  
s+=i; break;  
}  
printf("i=%d,s=%d\n",i,s);  
}
```

```

4. #include <stdio.h>
main()
{
static int a[]={1,3,5,7,9};
int *p[3]={a+2,a+1,a};
int **q=p;
printf("%d\n",*(p[0]+1)***(q+1));
}
5. #include <stdio.h>
main()
{
char **p,*a[]={"Students","Love","Programming"};
p=a;
printf("%s,%c\n",*(p+2),***(p+2)+5));
}

```

三、阅读下面的程序，请将程序完成的功能及正确执行结果写在答题纸上。（每小题 7.5 分，2 小题共 15 分。）

```

1. #include <stdio.h>
#include <string.h>
void process_string(char *p, char *q)
{
char temp;
while(p<q)
{
temp=*p;*p=*q;*q=temp;
p++; q--;
}
}
int m;
char *p,*q,str[]="Hello";
n=strlen(str);
p=str;
q=p+(m-1);
process_string(p,q);
printf("%s\n",p);
}
2. #include <stdio.h>
#define M 3
void process_matrix(int (*p)[M])
{
int i,j,temp;
for(i=0;i<M;i++)
for(j=i;j<M;j++)
temp=*(p[i]+); *(p[i]+)=*(p[j]+); *(p[j]+)=temp;
}

```

```

}
main()
{
int a[M][M],(*p)[M],i,j;
for(i=0;i<M;i++)
for(j=0;j<M;j++)
*(*(a+i)+j)=1*M+j;
p=a;
process_matrix(p);
for(i=0;i<M;i++)
{
for(j=0;j<M;j++)
printf("%3d",*(*(a+i))[j]);
printf("\n");
}
}

```

四、请按照要求编写程序写在答题纸上。（每小题 10 分，2 小题共 20 分。）

1. 在主函数中由键盘输入两个正整数，写两个函数分别求取它们的最大公约数和最小公倍数，在主函数中调用它们并输出结果。

2. 在主函数中由键盘输入 10 个无空格的字符串（每个字符串长度不超过 10），存放在二维字符数组中，写一个函数实现对二维字符数组中的字符串按字典顺序由小到大排序，在主函数中调用它并输出结果。

七、数据结构 (75 分)

一、关于堆栈的问题 (20 分)

1. 说明对堆栈可进行的操作种类以及各种操作的进行方式；

2. 试画出运行下列指令时堆栈动态变化示意图：

- step1: PUSH A
- step2: PUSH B
- step3: POP A
- step4: POP B

运行结束后 A、B 的值改变了吗？

3. 分别用数组的方式和单链表的方式给出堆栈的定义，并对所定义的量作注解。

二、程序填空题 (20 分)

1. 试用递归算法计算 n!，设函数名为 Dg:

```

int Dg( 1 )
{
int x;
x = 2
if (n<0) return 3
else if (n= =0 || n= =1) return 4
else return 5
}

```

2. 设有一个已从小到大排序的 N 个元素的实型表 A ，要用二分法在其中搜索元素 X ，试对其实现函数进行填空（找到时返回位置值，否则返回-1）

```
int BinarySearch(____1____) //参数说明
{int left=____2____, right=____3____; //初始化右边界
  while(left<=right)
  { int middle=____4____; //中点位置
    if(x==A[middle])____5____; //找到 X
    if(x>A[middle])____6____; //X在右半
    else right=middle-1; //X在左半
  }
  return -1;
}
```

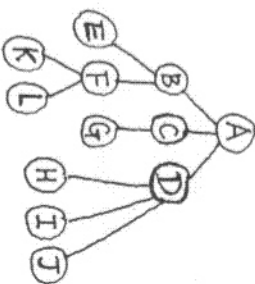


图1

三. 回答下列问题 (35分)

1. 设有一个字符串“ABCE”，试写出其所有的真子串。
2. 设有图1所示的树，试分别写出“先根”和“后根”两种遍历方式下的访问顺序。
3. 列举五种常见的排序方法。
4. 试说明队列的特点。
5. 试说明字符串可进行哪些操作。