中　山　大　学

二〇〇五年港澳台人士攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：710

科目名称：数学分析与高等代数

考试时间：4月16日下午

考生须知
全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不得分！答题要写清题号，不必抄题。

《数学分析》试题

一、(10 分) 求极限：$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$.

二、(15 分) 证明：若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，且有有限的 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，则此函数在已知区间上是有界的.

三、(15 分) 陈述拉格朗日中值定理，并用它证明下列不等式：

$$\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a},$$

其中 $0<a<b$.

四、(15 分) 用 $\varepsilon-N$ 语言叙述函数列 $\{f_n\}$ 在数集 D 上一致收敛于函数 f 的意义. 讨论下列函数在所示区间 D 上是否一致收敛：

$$f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2},\quad n=1,2,\cdots,\quad D=(-\infty,+\infty).$$

五、(20 分) 计算：

1) 设 $u=f\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right)$，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$.

2) 设 C 为圆周 $x^2+y^2=a^2$，求曲线积分：

$$\oint_C xy^2\mathrm{d}y-x^2y\mathrm{d}x.$$

(第2页在背面)

高等代数试题

1. (10 分) 求矩阵 X 使 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. (15 分) 由向量 $\alpha_1=(1,\ 1,\ -2,\ 1)$, $\alpha_2=(3,\ 1,\ -4,\ 4)$ 生成的 R^4 的子空间记为 W, 试求一个齐次线性方程组使它的解空间为 W, 这里 R 表示实数域 .

3. (15 分) 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ 的 Jordan 标准形和最小多项式.

4. (15 分) 证明: 对复数域上任一 $n\times n$ 矩阵 A，存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 是上三角矩阵.

5. (20 分) 用 R 表示实数域，设欧氏空间 R^3 上的线性变换 T 在标准基 $\varepsilon_1=(1,0,0)$, $\varepsilon_2=(0,1,0)$, $\varepsilon_3=(0,0,1)$ 下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

(1). 求 T 的特征值和特征向量;

(2). 求 R^3 的一组标准正交基, 使 T 在此基下的矩阵为对角矩阵.