中 山 大 学

二00五年港澳台人士攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：363

科目名称：高等数学（A）

考试时间：4 月 16 日 下午

> **考生须知**
> 全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不得分！答题要写清题号，不必抄题。

本卷共九大题，满分为 150 分。

一，完成下列各题：（每小题 6 分，共 24 分。）

1，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\tan 2x}$ 。

2，设 $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\dfrac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$，求 y' 。

3，求不定积分 $\int\dfrac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx$ 。

4，$f(x)=\int_{x^2}^{b}\dfrac{\sin\sqrt{t}}{t}dt$ ，$x>0$，求 $f'(x)$ 。

二，完成下列各题：（每小题 8 分，共 32 分。）

1，若 $f(x)$ 连续，求 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x}{x-a}\int_a^x f(t)dt$ 。

2，若 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，求证：$f(x)$ 在 $x=0$ 可导。

3，若矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ ，求 A^{-1} 。

4，求一阶常微分方程 $xy'+3y=5x^2$ 的通解。

考试完毕，试题和草稿纸随答题纸一起交回。

三，（本题 12 分）

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，求证：至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得 $\int_a^{\xi}f(t)dt=\int_{\xi}^{b}\dfrac{1}{f(t)}dt$ 。

四，（本题 12 分）

若 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上给定的以 T 为周期的连续函数，求证：定积分 $\int_x^{x+T}f(t)dt$ 的值与 x 无关。

五，（本题 14 分）

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(2n+1)x^{2n}$ 的收敛区间及收敛域，并求如下正项级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(2n+1)\dfrac{1}{2^n}$ 的和。

六，（本题 14 分）

设 ℓ 是正方形区域 $D=\{(x,y):\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$ 的正向边界，$f(x)$ 是 D 上连续的正值函数，求证：$I=\oint_{\ell}xf(y)dy-\dfrac{y}{f(x)}dx\ge 2$ 。

七，（本题 14 分）

计算曲面积分 $I=\iint_{S^+} x\,dydz+(y+y^2)\,dzdx+z\,dxdy$，其中 S^+ 为曲面 $z=x^2+y^2$，$0\le z\le 1$，的下侧。

八，（本题 14 分）

若向量组 $X_1,X_2,\cdots,X_k$ 是线性齐次方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，而向量 Y 不是如上线性齐次方程组的解。求证：向量组 $Y,Y+X_1,Y+X_2,\cdots,Y+X_k$ 线性无关。

九，（本题 14 分）

设三阶方阵 A 满足条件 $A^3-2A^2-5A+6E=0$，其中 E 是三阶单位矩阵。

（1）求方阵 A 的全部特征值；

（2）求方阵 A 的行列式 $|A|$；

（3）求方阵 A 的伴随矩阵 A^* 的全部特征值。