中　山　大　学

二OO五年港澳台人士攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：304

科目名称：数学(四)

考试时间：4月16日下午

考生须知
全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不得分！答题要写清题号，不必抄题。

一、填空题（本题共6小题，每题4分，满分24分，把答案写在答题纸上）

(1) 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ （a 为有限数），则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$ ______

(2) 设 $y=\ln[\frac{1}{x}+\ln(\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x})]$，求 $y'=$ ______

(3) 近似计算 $\cos 151^\circ\approx$ ______

(4) 设 $y=(x^2+2x+2)e^{-x}$，求 $y^{(n)}=$ ______

(5) 已知4阶实矩阵 A 的伴随矩阵为

$$A^*=\begin{bmatrix}0&0&2&1\\0&0&0&4\\1&2&0&0\\2&3&0&0\end{bmatrix}，则 A=\_\_\_\_\_\_$$

(6) 假设 X 是秩为 K 的（T×K）矩阵，R 为秩为 J 的（J×K）矩阵，$X(X'X)^{-1}R'[R(X'X)^{-1}R']^{-1}R(X'X)^{-1}X'$ 的秩为______

二、选择题（本题共8小题，每题4分，满分32分，把答案写在答题纸上）

(7) 设 $f(x,y)=\sqrt{xy}$，则 $f'_y(1,0)=$ ______。

(A) 0　(B) 1　(C) -1　(D) 不存在

(8) 若 $z=\sqrt{x+1}+f(\sqrt{y})$，且 x=0 时，$z=y^2$，则 z= ______

(A) $\sqrt{x+1}+y^2$

(B) $\sqrt{x+1}+y^2-1$

(C) $\sqrt{x+1}+y^4$

(D) $\sqrt{x+1}+y^4-1$

(9) 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{y^2} & xy\neq 0\\ xy & xy=0\end{cases}$，则 $f'_x(0,1)=$（　）。

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) -1

(10) 设有多项式 $P(x)=x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，又设 $x=x_0$，则 $P'(x_0)$ 满足

(A) $P'(x_0)\le 0$　(B) $P'(x_0)<0$　(C) $P'(x_0)\ge 0$　(D) $P'(x_0)>0$

(11) 设 A 为 n 阶方阵，以 A^* 记 A 的伴随矩阵，以 $(A^*)^*$ 记 A^* 的伴随矩阵，则下列叙述不正确的是

(A) 当 $n=2$ 时，$(A^*)^*=A$

(B) 当 $n>2$ 时，若 $|A|=0$，则 $(A^*)^*=O$

(C) 当 $n>2$ 时，若 $|A|\neq 0$，则 $(A^*)^*=A$

(D) 当 $n\ge 2$ 时，若 $|A|\neq 0$，则 $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$

(12) 设

$$M_1=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&-1&-2\\3&-2&2\end{bmatrix}\quad M_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\3&-2&2\end{bmatrix}$$

$$M_3=\begin{bmatrix}-1&0&0\\2&-1&0\\3&-2&-1\end{bmatrix}\quad M_4=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

则 M_1,M_2,M_3,M_4 中不能与对角矩阵相似的是

(A) M_1　(B) M_2　(C) M_3　(D) M_4

考试完毕，试题和草稿纸随答题纸一起交回。

（13）当事件 A 和事件 B 至少一个发生时，事件 C 必定发生，则以下陈述成立的是

（A）A，B 同时不发生，C 必不发生

（B）A 不发生或者 B 不发生时，C 必不发生

（C）A 发生时 C 必发生

（D）B 发生时 C 必不发生

（14）设 $(x_1,\ldots,x_n)$ 是从正态总体 X 中抽取出来的简单随机样本，总体方差 $DX=\sigma^2$，$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，则下列叙述不正确的是

（A）$\hat{\sigma}$ 是 σ 的最大似然估计量　　（B）$\hat{\sigma}$ 是 σ 的无偏估计量

（C）$\hat{\sigma}$ 是 σ 的矩估计量　　（D）$\hat{\sigma}$ 是 σ 的一致估计量

三、**解答题**（本题共 8 小题，满分 94 分，把答案写在答题纸上）

（15）（本题 12 分）

设函数 $f(x)=\begin{cases}1-2x^2 & x<-1\\ x^3 & -1\le x\le 2\\ 12x-16 & x>2\end{cases}$

（1）写出 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 的表达式。

（2）$g(x)$ 是否有间断点、不可导点，若有，指出这些点。

（16）（本题 12 分）

讨论函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ 的单调性，凹凸性，极值与拐点。

（17）（本题 12 分）

设可导函数 $f=f(x)$ 由方程 $x^3-3xy^2+2y^3=32$ 所确定，试讨论并求出 $f(x)$ 的极值。

（18）（本题 12 分）

假定某企业在两个相互分离的市场上出售同一种商品，两个市场的需求函数分别为：

$P_1=20-2Q_1$ ；　$P_2=16-Q_2$　　P_1,P_2 为价格；Q_1,Q_2 为销售量

总成本函数为 $C=4Q+2$，

请证明企业实行价格差别策略比实行价格无差别策略可以得到更多的总利润。

（19）（本题 12 分）

已知无风险利率为 7%，某股票 S 期望收益为 15%，其标准差 σ 为 22%。请问一个具有 $U=E(r_p)-2\times\sigma_p{}^2$ 形式效用函数的投资者将如何选择其在无风险资产与风险资产 S 的投资比例，其中 $E(r_p)$ 与 σ_p^2 分别为资产组合的预期收益与方差。

（20）（本题 12 分）

设 3 阶方阵 A 能满足 $Aa_1=O, Aa_2=2a_1+a_2, Aa_3=-a_1+3a_2-a_3$，其中 $a_1=[1,\ 1,\ 0]^T$, $a_2=[0,\ 1,\ 1]^T$, $a_3=[1,\ 0,\ 1]^T$，请证明矩阵 A 可以与对角矩阵 Λ 相似，并写出对角矩阵 Λ

（21）（本题 11 分）

已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\6&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，且矩阵满足 $A^*X=2A^{-1}-AX+E$，A^* 为 A 的伴随矩阵，E 为 3 阶单位方阵，求 X

（22）（本题 11 分）

已知总体 X 服从 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ,σ^2 均大于 0 且未知，从该总体中独立抽取 20 个样本 x_i，计算得到 $\sum_{i=1}^{20}x_i=104.2$，$\sum_{i=1}^{20}x_i^2=543.804$

（1）　求总体均值与标准差的 95%双侧置信区间

（2）　在显著性水平为 5%下检验假设：总体均值 $\mu=5$

（备用数据：$t_{0.025}(19)=2.093$，【对于自由度为 19 的 t 分布，$p(t>2.093)=0.025$】

$t_{0.05}(19)=1.7291$，$t_{0.025}(20)=2.086$，$t_{0.05}(20)=1.725$

$\chi^2_{0.025}(19)=32.852$【对于自由度为 19 的 χ^2 分布，$p(\chi^2>32.852)=0.025$】

$\chi^2_{0.975}(19)=8.907$，$\chi^2_{0.025}(20)=34.170$，$\chi^2_{0.975}(19)=9.591$，$\chi^2_{0.05}(19)=30.144$

$\chi^2_{0.95}(19)=10.117$，$\chi^2_{0.05}(20)=31.410$，$\chi^2_{0.95}(20)=10.851$）