中 山 大 学

二00四年港澳台人士攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：363

科目名称：高等数学（A）

考试时间： 4 月 24 日 下 午

考 生 须 知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不得分！答题要写清题号，不必抄题。

本卷共九大题，满分为 150 分。

一，完成下列各题：（每小题 6 分，共 24 分。）

1，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\tan 3x}$ 。

2，设 $y=y(x)$ 满足方程 $x-y+\dfrac{1}{2}\sin y=0$ ，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 和 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 。

3，若函数 $f(x)$ 连续，求定积分 $\int_{-1}^{1}x[f(x)+f(-x)]dx$ 。

4，求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^3 x\,dx$ 。

二，完成下列各题：（每小题 8 分，共 32 分。）

1，若 $f(x)$ 在 $x=1$ 可导， 且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$， 求 $f'(1)$。

2，若 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，且在 D 内任一子区域 $D'\subset D$ 上有 $\iint_{D'} f(x,y)dxdy = 0$，求证：在 D 上有 $f(x,y)\equiv 0$。

3，若矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，求 A^{-1} 。

4，求一阶常微分方程 $y'+2xy=2xe^{-x^2}$ 的通解。

考试完毕，试题和草稿纸随答题纸一起交回。

三，（本题 12 分）

设 $f(x)$ 是一阶连续可微函数，问 $f(x)$ 应满足什么条件，方程 $2f(xy)=f(x)+f(y)$ 在点 $(1,1)$ 的某邻域能确定唯一的隐函数 $y=y(x)$。

四，（本题 12 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导， $f(x)>0$ 且满足 $\int_0^x t f(t)dt=\dfrac{x}{3}\int_0^x f(t)dt$ ，当 $x>0$ 时，求 $f(x)$ 。

五，（本题 14 分）

若幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛，求证：幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n-1}$ 在 $x=2$ 处绝对收敛。

六，（本题 14 分）

求闭路积分 $\oint_l \dfrac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$，其中 l 分别为：

（1） l 是不经过原点且内部不含原点的简单闭曲线；

（2） l 是圆周 $x^2+y^2=R^2$；

（3） l 是环绕原点的任意简单闭曲线。

七，（本题 14 分）

若 $y_0 = e^x$ 满足二阶线性非齐次方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \quad ,$$

而 $y_1 = x$， $y_2 = x^2$ 满足其对应的线性齐次方程，求 P(x)，Q(x)，和 f(x)。

八，（本题 14 分）

研究线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + (a+2)x_2 - (b+2)x_3 = 3 \\ -3a x_2 + (a+2b)x_3 = -3 \end{cases}$$

（1）问 a，b 取何值时，方程组有唯一解；

（2）求方程组的唯一解。

九，（本题 14 分）

设三阶方阵 A 的特征值分别是 $-1, 0, 1$，I 是三阶单位矩阵。

（1）求矩阵 $B = 2A^3 - 5A^2 + 3I$ 的全部特征值。

（2）计算矩阵 B 的行列式 $|B|$ 。